MATHEMATICS

MEHRFACH ITERIERTE RIEMANN–STIELTJESSCHE INTEGRALE IN ABSTRAKTEN RÄUMEN

VON

J. RIDDER

(Communicated at the meeting of November 24, 1962)

Einleitung. In seiner Dissertation: *Riemann–Stieltjes integratie bij functies van twee of meer veranderlijken*, Wolters, Groningen–Batavia 1937, 163 S. bewies H. LUIKENS für die von ihm betrachtete Definition von R.–S. Integralen in euklidischen Räumen als letzten Satz: $U_1, U_2, \ldots, U_n$ *seien abgeschlossene Intervalle, welche in euklidischen Räumen von einer endlichen, aber mit dem Index im allgemeinen veränderlichen Anzahl von Dimensionen liegen. In jedem Intervall* U_j *sei eine beschränkt additive Intervallfunktion* $\psi_j(u_j)$ *von beschränkter Variation gegeben. Eine Funktion* $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, *definiert für alle n-Tupel* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *von Punkten aus den zugehörigen Intervallen, sei gleichmäßig beschränkt. Damit für jedes Teilintervall* u_{i_1} *von* U_{i_1}, *für jedes Teilintervall* u_{i_2} *von* $U_{i_2}, \ldots,$ *und schließlich für jedes Teilintervall* u_{i_n} *von* U_{i_n}, *wie auch die Permutation* $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ *der natürlichen Zahlen* $1, 2, \ldots, n$ *gewählt sei, alle n-fach iterierten R.–S. Integrale*

$$(0)\qquad \int_{u_{i_1}} d\psi_{i_1}(u_{i_1}) \underline{\overline{\int}}_{u_{i_2}} d\psi_{i_2}(u_{i_2}) \ldots \underline{\overline{\int}}_{u_{i_n}} d\psi_{i_n}(u_{i_n}) \cdot f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

existieren, ist notwendig und hinreichend, daß bei jeder Permutation $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ *die R.–S. Integrale*

$$\int_{u_{i_1}} dV_{i_1}(u_{i_1}) \Big[\overline{\int}_{u_{i_2}} dV_{i_2}(u_{i_2}) \ldots \overline{\int}_{u_{i_n}} dV_{i_n}(u_{i_n}) \cdot f(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \\ - \underline{\int}_{u_{i_2}} dV_{i_2}(u_{i_2}) \ldots \underline{\int}_{u_{i_n}} dV_{i_n}(u_{i_n}) \cdot f(X_1, X_2, \ldots, X_n)\Big]$$

für jedes Teilintervall u_{i_1} *von* U_{i_1}, *für jedes Teilintervall* u_{i_2} *von* $U_{i_2}, \ldots,$ *und für jedes Teilintervall* u_{i_n} *von* U_{i_n} *existieren und gleich Null sind; hierbei deutet* $V_j(u_j)$ *für jedes* $j = 1, 2, \ldots, n$ *die Totalvariation von* $\psi_j(u_j)$ *in* u_j *an. Alle Integrale* (0) *liefern dann außerdem denselben Wert, unabhängig von der Aufeinanderfolge der Integrationen.*

Wir möchten zeigen, daß das benutzte Beweisverfahren sich auch anwenden läßt zu einer Übertragung des LUIKENSschen Satzes auf R.–S. Integrale in abstrakten Räumen, definiert wie in unserer Arbeit: *Die Einführung von beschränkt- und total-additivem Maß* I, II, diese Proceed., Series A, vol. **59**, 1956, S. 143–165; *das Ausgangsmaß soll dabei σ-additiv auf dem zugehörigen Mengenkörper sein* [1]) [2]).

§ 1. Wir fangen mit einer Erweiterung des Hilfssatzes loc. cit. 2), § 11 an; die in letztgenannter Arbeit benutzte Terminologie wird auch hier als bekannt vorausgesetzt.

Hilfssatz. Auf $M^{(j)} \in K^{(j)}$ ($j=1$ oder $2 \ldots$ oder n) [3]) sei $u(x^{(j)})$ beschränkt, außerdem $\Phi^{(j)}$-integrierbar. Dann folgt aus

$$\int_{m^{(j)}} u(x^{(j)})\, d\Phi^{(j)} = 0$$

für jede Menge $m^{(j)} \in K^{(j)}$ und $\subseteqq M^{(j)}$, daß auch immer

$$\int_{m^{(j)}} u(x^{(j)})\, dT^{(j)} = 0 \tag{1}$$

ist; also insbes.:

$$\int_{M^{(j)}} u(x^{(j)})\, dT^{(j)} = 0. \tag{1^{bis}}$$

Beweis. Der Fall eines $m^{(j)}$ mit $T^{(j)}(m^{(j)})=0$ kann außer acht bleiben; dann sind $\int_{m^{(j)}} u(x^{(j)})\, dT^{(j)}$ und $\int_{m^{(j)}} u(x^{(j)})\, d\Phi^{(j)}$ beide immer gleich Null.

Mit loc. cit. 2), §§ 5 und 7^{bis} folgt:

$$u(m^{(j)}) \cdot G^{(j)}(m^{(j)}) - t(m^{(j)}) \cdot |g^{(j)}|\,(m^{(j)}) \leqq \int_{m^{(j)}} u(x^{(j)})\, d\Phi^{(j)} \leqq$$
$$\leqq t(m^{(j)}) \cdot G^{(j)}(m^{(j)}) - u(m^{(j)}) \cdot |g^{(j)}|\,(m^{(j)}),$$

wobei $t(m^{(j)})$ und $u(m^{(j)})$ bzw. obere und untere Grenze von u auf $m^{(j)}$.

Aus $T^{(j)}(m^{(j)}>0$ mit $G^{(j)}(m^{(j)})=0$ oder $|g^{(j)}|\,(m^{(j)})=0$ folgt:

$$t(m^{(j)}) \geqq 0,\ u(m^{(j)}) \leqq 0. \tag{2}$$

Bei $G^{(j)}(m^{(j)})>0$ und $|g^{(j)}|(m^{(j)})>0$ gilt (2) auch, wenn schon eine der Zahlen $t(m^{(j)})$, $u(m^{(j)})$ gleich Null ist.

Sind $G^{(j)}(m^{(j)})$, $|g^{(j)}|(m^{(j)})$, $t(m^{(j)})$ und $u(m^{(j)})$ alle positiv, so ist für jedes $\bar{m}^{(j)} \subseteqq m^{(j)}$ und $\in K^{(j)}$:

$$u(m^{(j)}) \cdot G^{(j)}(\bar{m}^{(j)}) \leqq u(\bar{m}^{(j)}) \cdot G^{(j)}(\bar{m}^{(j)}) \leqq t(\bar{m}^{(j)}) \cdot |g^{(j)}|(\bar{m}^{(j)}) \leqq t(m^{(j)}) \cdot |g^{(j)}|(\bar{m}^{(j)}),$$

---

[1]) Ein derartiges Maß Φ heißt für den Körper K σ-additiv, wenn sie für die Mengen von K beschränkt additiv ist, und aus

$$A_n \in K (n=1, 2, \ldots), A_j \cdot A_k = 0\ (j \neq k),\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in K \text{ folgt } \Phi(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n).$$

[2])Siehe schon für die Anwendung bei zweifach iterierten Integralen J. Ridder, *Die Gleichheit von iterierten Riemann-Stieltjesschen Integralen in abstrakten Raumen* I, II, diese Proceed., Series A, vol. **65**, 1962.

[3]) Statt zwei Räume $R^{(j)}$, zwei Körper $K^{(j)}$, u.s.w. wie im Zitat 2) werden hier somit n Räume $R^{(j)}$, n Körper $K^{(j)}$, u.s.w. betrachtet.

wodurch die zugehörigen beschränkt additiven Mengenfunktionen

$$G^{(j)*}(\bar{m}^{(j)}) \equiv G^{(j)}(\bar{m}^{(j)}) - \frac{u(m^{(j)})}{t(m^{(j)})} \cdot G^{(j)}(\bar{m}^{(j)}) \text{ und}$$

$$|g^{(j)*}|(\bar{m}^{(j)}) \equiv |g^{(j)}|(\bar{m}^{(j)}) - \frac{u(m^{(j)})}{t(m^{(j)})} \cdot G^{(j)}(\bar{m}^{(j)})$$

$\geqq 0$ sind, mit $\Phi(\bar{m}^{(j)}) = G^{(j)*}(\bar{m}^{(j)}) - |g^{(j)}|^{*}(\bar{m}^{(j)})$, und $G^{(j)*}(m^{(j)}) < G^{(j)}(m^{(j)})$, $|g^{(j)}|^{*}(m^{(j)}) < |g^{(j)}|(m^{(j)})$. Bekanntlich ist dies unmöglich.

In analoger Weise zeigt man die Unmöglichkeit von $t(m^{(j)})$ und $u(m^{(j)})$ beide negativ, bei $G^{(j)}(m^{(j)})$ und $|g^{(j)}|(m^{(j)})$ positiv.

In den möglichen Fällen hat man somit immer (2).

Nun liefert Anwendung von loc. cit. 2), § 7^bis (letzter Satz) [4]) für jedes $m^{(j)} \subseteqq M^{(j)}$ und $\in K^{(j)}$:

$$\overline{\int}_{m^{(j)}} u(x^{(j)})\, dT^{(j)} \geqq 0 \text{ und } \underline{\int}_{m^{(j)}} u(x^{(j)})\, dT^{(j)} \leqq 0,$$

somit wegen der Existenz des $T^{(j)}$-Integrals über $m^{(j)}$ die Relationen (1) und (1^{bis}).

§ 2. Das nun folgende Haupttheorem dieser Arbeit wird in zwei Teile zerlegt, von denen der erste Teil die Notwendigkeit der eingeführten Bedingungen, der zweite Teil ihre Hinlänglichkeit behauptet. Diese Zerlegung hängt damit zusammen, daß die Notwendigkeit sich schon ohne Annahme der weiter unten in den Räumen $R^{(j)}$ eingeführten Bedingungen ω und ω^* beweisen läßt, während diese Bedingungen beim Beweise der Hinlänglichkeit benutzt werden [5]).

H a u p t t h e o r e m (Notwendigkeit der Bedingungen) [5bis]). *Für $j = 1, 2, \ldots, n$ seien $R^{(j)}$, $K^{(j)}$, $\Phi^{(j)}$ und $T^{(j)}$ definiert wie loc. cit.* 2), § 7*; außerdem sei jede Menge $M^{(j)} \in K^{(j)}$, und die Funktion $u(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$ beschränkt auf der Produktmenge $M^{(1)} \times M^{(2)} \times \ldots \times M^{(n)}$.*

Zur Existenz der n-fach iterierten Riemann–Stieltjesschen Integrale

$$\int_{m^{(i_1)}} d\Phi^{(i_1)} \underline{\overline{\int}}_{m^{(i_2)}} d\Phi^{(i_2)} \ldots \underline{\overline{\int}}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) \tag{3}$$

bei jeder Menge $m^{(i_1)} \subseteqq M^{(i_1)}$, $\in K^{(i_1)}$, jeder Menge $m^{(i_2)} \subseteqq M^{(i_2)}$, $\in K^{(i_2)}$, ..., und jeder Menge $m^{(i_n)} \subseteqq M^{(i_n)}$, $\in K^{(i_n)}$, und wie auch die Permutation $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ der natürlichen Zahlen 1, 2, ..., *n gewählt wird, ist notwendig daß bei jeder Permutation $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ die R.–S. Integrale*

$$\left.\begin{aligned} &\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \Big[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \ldots \overline{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) - \\ &\qquad - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \cdot \ldots \underline{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})\Big] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

[4]) Anwendung von Bedingung ω ist an dieser Stelle somit überflüssig. Vergl. loc. cit. 2), § 11 (Beweis des Hilfssatzes, und Fußn. 7^bis).

[5]) Vergleiche loc. cit. 2), § 11 [Beweis des Haupttheorems (erster Absatz mit Fußn. 7^bis)], auch § 12.

[5bis]) Selbstverständlich werden die Maße $T^{(j)}(M^{(j)}) > 0$ vorausgesetzt, da sonst der Inhalt des Haupttheorems trivial wird.

für alle wie oben definierten $m^{(i_1)}, \ldots, m^{(i_n)}$ existieren, und den Wert Null haben.

Bemerkung. Mit der Existenz des n-fach iterierten R.–S. Integrals (3) meinen wir, daß bei willkürlicher, jedesmal fester Wahl von Ober- oder Unterintegration zu jeder Funktion $\Phi^{(i_j)}$ ($j = n, n-1, \ldots$ oder 2) das $\Phi^{(i_1)}$-Integral über $m^{(i_1)}$ immer existiert, mit einem von der Wahl der Ober- und Unterintegrationen unabhängigen Wert.

Beweis. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung von $m^{(i_2)}$ in endlich viele Teilmengen $(r^{(i_2,\varkappa)})$, mit $r^{(i_2,\varkappa)} \in K^{(i_2)}$ ($\varkappa = 1, \ldots, N^{(i_2)}$), und

$$G^{(i_2)}(m^{(i_2)}) - \varepsilon < \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_2)}} \Phi^{(i_2)}(r^{(i_2,\varkappa)}), \tag{5}$$

wodurch auch

$$\sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_2)}} |g^{(i_2)}| \, (r^{(i_2,\varkappa)}) < \varepsilon. \tag{6}$$

Die auf der Produktmenge $M^{(i_1)} \times M^{(i_2)}$ definierten Funktionen $H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)})$ und $K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)})$ gehen aus $u(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ durch nacheinander ausgeführte Ober- oder (und) Unterintegrationen in bezug auf $\Phi^{(i_n)}, \Phi^{(i_{n-1})}, \ldots, \Phi^{(i_3)}$ bzw. über $m^{(i_n)}, m^{(i_{n-1})}, \ldots, m^{(i_3)}$ hervor [6]. Aus der Existenz des Integrals (3) folgt sodann für jede Menge $r^{(i_2,\varkappa)}$

$$\int_{\bar{m}^{(i_1)}} d\Phi^{(i_1)} \left[\overline{\int}_{r^{(i_2,\varkappa)}} d\Phi^{(i_2)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}) - \underline{\int}_{r^{(i_2,\varkappa)}} d\Phi^{(i_2)} \cdot K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}) \right] = 0$$

mit $\bar{m}^{(i_1)} \in M^{(i_1)}$ und $\in K^{(i_1)}$. Wegen des Hilfssatzes (§ 1) ist dadurch:

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \Big[\sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_2)}} \overline{\int}_{r^{(i_2,\varkappa)}} d\Phi^{(i_2)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}) - \\ &\qquad\qquad - \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_2)}} \underline{\int}_{r^{(i_2,\varkappa)}} d\Phi^{(i_2)} \cdot K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}) \Big] = 0. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Ist M die obere Schranke von $|u|$ auf $M^{(1)} \times \ldots \times M^{(n)}$, so folgt aus (5) und (6) bei willkürlicher Wahl von $x^{(i_1)} \in m^{(i_1)}$: [7]

$$\left\{ \begin{aligned} &\Big| \overline{\int}_{m^{(i_2)}} dG^{(i_2)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}) - \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_2)}} \overline{\int}_{r^{(i_2,\varkappa)}} d\Phi^{(i_2)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}) \Big| \leqq \\ &\qquad \leqq \Big| \overline{\int}_{m^{(i_2)}} - \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_2)}} {}_{r^{(i_2,\varkappa)}} dG^{(i_2)} \cdot H \Big| + \Big| \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_2)}} \underline{\int}_{r^{(i_2,\varkappa)}} d|g^{(i_2)}| \cdot H \Big| < \\ &\qquad\qquad < 2M \cdot \varepsilon \cdot m_{T^{(i_3)}}(m^{(i_3)}) \ldots m_{T^{(i_n)}}(m^{(i_n)}) = A \cdot \varepsilon, \end{aligned} \right. \tag{8}$$

und ebenso

$$\Big| \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dG^{(i_2)} \cdot K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}) - \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_2)}} \underline{\int}_{r^{(i_2,\varkappa)}} d\Phi^{(i_2)} \cdot K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}) \Big| < A \cdot \varepsilon. \tag{9}$$

---

[6]) Zur Konstruktion von $H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)})$, und ebenso von $K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)})$, gibt es somit 2^{n-2} Möglichkeiten.

[7]) Siehe auch loc. cit. 2), § 9 (erster Satz) und § 6.

(7), (8) und (9) liefern:

$$\begin{aligned}
&\overline{\int}_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \left[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dG^{(i_2)} \cdot H - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dG^{(i^2)} \cdot K\right] \leqq \\
&\quad \leqq \overline{\int}_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \left[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dG^{(i_2)} \cdot H - \sum_{(\varkappa)} \overline{\int}_{r^{(i_2,\varkappa)}} d\Phi^{(i_2)} \cdot H\right] + \\
&\quad + \overline{\int}_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \left[\sum_{(\varkappa)} \overline{\int}_{r^{(i_2,\varkappa)}} d\Phi^{(i_2)} \cdot H - \sum_{(\varkappa)} \underline{\int}_{r^{(i_2,\varkappa)}} d\Phi^{(i_2)} \cdot K\right] + \\
&\quad + \overline{\int}_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \left[\sum_{(\varkappa)} \underline{\int}_{r^{(i_2,\varkappa)}} d\Phi^{(i_2)} \cdot K - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dG^{(i_2)} \cdot K\right] < \\
&\quad < A \cdot \varepsilon \cdot m_{T^{(i_1)}}(m^{(i_1)}) + 0 + A \cdot \varepsilon \cdot m_{T^{(i_1)}}(m^{(i_1)}) = 2A \cdot \varepsilon \cdot m_{T^{(i_1)}}(m^{(i_1)});
\end{aligned}$$

außerdem:

$$\underline{\int}_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \left[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dG^{(i_2)} \cdot H - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dG^{(i_2)} \cdot K\right] > -2A \cdot \varepsilon \cdot m_{T^{(i_1)}}(m^{(i_1)}).$$

$\varepsilon \to 0$ liefert schließlich:

$$\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \left[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dG^{(i_2)} \cdot H - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dG^{(i_2)} \cdot K\right] = 0. \tag{10}$$

Addition von (10) und der aus (10) bei Ersetzung von $G^{(i_2)}$ durch $|g^{(i_2)}|$ hervorgehende Gleichheit gibt [8])

$$\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \left[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \cdot H - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \cdot K\right] = 0.$$

Mit Rücksicht auf die endlich vielen Möglichkeiten für $H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)})$ und $K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)})$ läßt sich auch schreiben:

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \left[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \overline{\int}_{m^{(i_3)}} d\Phi^{(i_3)} \ldots \overline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot\right. \\
&\quad \cdot u(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \underline{\int}_{m^{(i_3)}} d\Phi^{(i_3)} \ldots \underline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot \\
&\qquad\qquad \left. \cdot u(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})\right] = 0.
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nun weiter eine Zerlegung von $m^{(i_3)}$ in endlich viele Teilmengen $(r^{(i_3,\varkappa)})$, mit $r^{(i_3,\varkappa)} \in K^{(i_3)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, N^{(i_3)})$, und

$$G^{(i_3)}(m^{(i_3)}) - \varepsilon < \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_3)}} \Phi^{(i_3)}(r^{(i_3,\varkappa)}), \tag{12}$$

dadurch auch

$$\sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_3)}} |g^{(i_3)}|\, (r^{(i_3,\varkappa)}) < \varepsilon. \tag{13}$$

Die auf der Produktmenge $M^{(i_1)} \times M^{(i_2)} \times M^{(i_3)}$ definierten Funktionen $H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)})$ und $K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)})$ gehen aus $u(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ durch nacheinander ausgeführte Ober- oder (und) Unterintegrationen in bezug auf $\Phi^{(i_n)}, \Phi^{(i_{n-1})}, \ldots, \Phi^{(i_4)}$ bzw. über $m^{(i_n)}, m^{(i_{n-1})}, \ldots, m^{(i_4)}$ hervor. Mit (11) folgt dadurch für jede Menge $r^{(i_3,\varkappa)}$

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \left[\sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_3)}} \overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \overline{\int}_{r^{(i_3,\varkappa)}} d\Phi^{(i_3)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}) -\right. \\
&\qquad \left. - \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_3)}} \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \underline{\int}_{r^{(i_3,\varkappa)}} d\Phi^{(i_3)} \cdot K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)})\right] = 0;
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

---

[8]) Siehe dabei loc. cit. 2), § 8, Formeln (3) und (4).

auch folgt aus (11) daß $\overline{\int}_{m^{(i_2)}}$ und $\underline{\int}_{m^{(i_2)}}$ sich in (14) wechseln lassen.

Bei willkürlicher Wahl von $x^{(i_1)} \in m^{(i_1)}$ ist [9])

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_3)}} \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \overline{\int}_{r^{(i_3,\varkappa)}} d\Phi^{(i_3)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}) \leqq \\
&\qquad \leqq \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_3)}} \overline{\int}_{r^{(i_3,\varkappa)}} d\Phi^{(i_3)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}) \leqq \\
&\qquad\qquad \leqq \overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_3)}} \overline{\int}_{r^{(i_3,\varkappa)}} d\Phi^{(i_3)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}) \leqq \\
&\qquad\qquad\qquad \leqq \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_3)}} \overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \overline{\int}_{r^{(i_3,\varkappa)}} d\Phi^{(i_3)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}),
\end{aligned}
$$

und es gibt analoge Ungleichheiten für

$$\underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_3)}} \int_{r^{(i_3,\varkappa)}} d\Phi^{(i_3)} \cdot K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}).$$

Damit folgt aus (14):

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \Big[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_3)}} \overline{\int}_{r^{(i_3,\varkappa)}} d\Phi^{(i_3)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}) - \\
&\qquad - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_3)}} \underline{\int}_{r^{(i_3,\varkappa)}} d\Phi^{(i_3)} \cdot K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)})\Big] = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

denn letztes Integral liegt zwischen zwei R.–S. Integralen, welche beide gleich Null sind; auch gilt (15) bei Umwechslung von $\overline{\int}_{m^{(i_2)}}$ und $\underline{\int}_{m^{(i_2)}}$.

Aus (7) wurde, mit (5) und (6), (10) abgeleitet; in analoger Weise folgt nun aus (15), mit (12) und (13),

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \Big[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \overline{\int}_{m^{(i_3)}} dG^{(i_3)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}) - \\
&\qquad - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \underline{\int}_{m^{(i_3)}} dG^{(i_3)} \cdot K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)})\Big] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

(16) behält ihre Gültigkeit bei Ersetzung von $G^{(i_3)}$ durch $|g^{(i_3)}|$.

Bei willkürlicher Wahl von $x^{(i_1)} \in m^{(i_1)}$ ist [9])

$$
\begin{aligned}
&\underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \underline{\int}_{m^{(i_3)}} dG^{(i_3)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}) + \\
&\qquad + \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \underline{\int}_{m^{(i_3)}} d|g^{(i_3)}| \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}) \leqq \\
&\quad \leqq \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \underline{\int}_{m^{(i_3)}} dT^{(i_3)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}) \leqq \\
&\qquad \leqq \overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \overline{\int}_{m^{(i_3)}} dT^{(i_3)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}) \leqq \\
&\quad \leqq \overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \overline{\int}_{m^{(i_3)}} dG^{(i_3)} \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}) + \\
&\qquad + \overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \overline{\int}_{m^{(i_3)}} d|g^{(i_3)}| \cdot H(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}),
\end{aligned}
$$

und es gibt analoge Ungleichheiten für

$$\underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \underline{\int}_{m^{(i_3)}} dT^{(i_3)} \cdot K(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, x^{(i_3)}).$$

---

[9]) Siehe loc. cit. 2), § 7^bis (letzter Satz).

Dadurch folgt mit (16) und der angegebenen Abänderung von (16):

$$\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \Big[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \overline{\int}_{m^{(i_3)}} dT^{(i_3)} \underline{\int}_{m^{(i_4)}} d\Phi^{(i_4)} \ldots \underline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot$$

$$\cdot\, u(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \underline{\int}_{m^{(i_3)}} dT^{(i_3)} \overline{\int}_{m^{(i_4)}} d\Phi^{(i_4)} \ldots \overline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot$$

$$\cdot\, u(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})\Big] = 0.$$ [10])

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß in der letzten Relation $\Phi^{(i_4)}$ durch $T^{(i_4)}$ ersetzt werden darf; u.s.w. Wir finden also daß alle Integrale (4) existieren, und den Wert Null haben. Die Bedingungen sind notwendig.

§ 3. Wir wiederholen hier die schon loc. cit. 2), § 8 gegebene Definition der Bedingung ω.

Im Raume $R^{(j)}$ sei $u(x^{(j)})$ eine auf $M^{(j)} \in K^{(j)}$ definierte beschränkte Funktion. Nach loc. cit. 2), § 7 (letzter Satz) gibt es dann eine Folge von Zerlegungen von $M^{(j)}$ in endlich viele, zu $K^{(j)}$ gehörende Mengen $M_h^{(j;n)}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, wobei die $(n+1)^{\text{te}}$ Zerlegung durch Unterteilung der Mengen der n^{ten} Zerlegung entsteht, mit

$$\overline{\int}_{M^{(j)}} u(x^{(j)})\, dT^{(j)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{(h)} t_h^{(n)} \cdot T^{(j)}\, (M_h^{(j;n)}), \tag{17}$$

und

$$\underline{\int}_{M^{(j)}} u(x^{(j)})\, dT^{(j)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{(h)} u_h^{(n)} \cdot T^{(j)}\, (M_h^{(j;n)}); \tag{18}$$

dabei ist $t_h^{(n)}$ = obere Grenze von $u(x^{(j)})$ auf $M_h^{(j;n)}$, und $u_h^{(n)}$ = untere Grenze von $u(x^{(j)})$ auf $M_h^{(j;n)}$.

Bedingung ω. Die im vorigen Absatz angegebene Folge von Zerlegungen einer Menge $M^{(j)} \in K^{(j)}$ ist immer so zu wählen, daß (17) und (18) bei Anwendung dieser Folge für *alle* auf $M^{(j)}$ beschränkten Funktionen gelten.

Hinzu kommt

Bedingung ω^*. $K^{(j)}$ enthält ein Teilsystem $K_0^{(j)}$ von *abzählbar* vielen Mengen mit folgender Eigenschaft: zu jeder Menge $M^{(j)} \in K^{(j)}$, mit $T^{(j)}\,(M^{(j)}) > 0$, gibt es eine monotone Folge $\{r_{M^{(j)}}^{(p)}\}$ $(p=1, 2, \ldots)$ von nicht notwendig paarweise verschiedenen Mengen $r_{M^{(j)}}^{(p)} \subseteqq M^{(j)}$ und $\in K_0^{(j)}$ mit $\lim\limits_{p\to\infty} T^{(j)}\,(r_{M^{(j)}}^{(p)}) = T^{(j)}\,(M^{(j)})$.

Haupttheorem (Hinlänglichkeit der Bedingungen). *Neben den Annahmen im ersten Absatz des Haupttheorems* (Notw. der Bed.) *in* § 2 *seien außerdem die Annahmen ω und ω^* gemacht.*

---

[10]) Man beweise erstens:

$$\overline{\int} dT^{(i_1)} \Big[\overline{\int} dT^{(i_2)} \overline{\int} dT^{(i_3)} \cdot H - \underline{\int} dT^{(i_2)} \underline{\int} dT^{(i_3)} \cdot K\Big] \leqq 0,$$

darauf

$$\underline{\int} dT^{(i_1)} \Big[\underline{\int} dT^{(i_2)} \underline{\int} dT^{(i_3)} \cdot H - \overline{\int} dT^{(i_2)} \overline{\int} dT^{(i_3)} \cdot K\Big] \geqq 0.$$

Dann sind die in § 2 zur Existenz der Integrale (3) *angegebenen Voraussetzungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend.*

Bei fester Wahl der Mengen, über die integriert wird, ist dabei der Wert des iterierten Integrals (3) *unabhängig von der Wahl der Permutation* $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ *der Zahlen* $1, 2, \dots, n$.

Bemerkung. Die Stellen, an welchen die Bedingungen ω und ω^* ihre erste Anwendung im Beweise finden, sind möglichst spät gewählt.

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung von $m^{(i_n)}$ in endlich viele Teilmengen $(r^{(i_n, \varkappa)})$, mit $r^{(i_n, \varkappa)} \in K^{(i_n)}$ $(\varkappa = 1, 2, \dots, N^{(i_n)})$, und

$$G^{(i_n)}(m^{(i_n)}) - \varepsilon < \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_n)}} \Phi^{(i_n)}(r^{(i_n, \varkappa)}) \leqq \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_n)}} G^{(i_n)}(r^{(i_n, \varkappa)}), \tag{19}$$

wodurch auch

$$\sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_n)}} |g^{(i_n)}|(r^{(i_n, \varkappa)}) < \varepsilon. \tag{20}$$

In analoger Weise wie (15) aus (14) läßt sich Existenz und Nullwert ableiten des Integrals, welches aus (4) hervorgeht durch Ersetzung von

$$\overline{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \text{ durch } \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_n)}} \overline{\int}_{r^{(i_n, \varkappa)}} dT^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$$

und von

$$\underline{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \text{ durch } \sum_{\varkappa=1}^{N^{(i_n)}} \underline{\int}_{r^{(i_n, \varkappa)}} dT^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}).$$

In derselben Weise wie (10) und (16), läßt sich nun, aus dem Resultat des vorigen Absatzes mit (19) und (20), ableiten:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \Big[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \overline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \overline{\int}_{m^{(i_n)}} dG^{(i_n)} \cdot \\ &\quad \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \underline{\int}_{m^{(i_n)}} dG^{(i_n)} \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})\Big] = 0. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Ebenso folgt:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \Big[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \overline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \overline{\int}_{m^{(i_n)}} d|g^{(i_n)}| \cdot u - \\ &\qquad - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_n)}} d|g^{(i_n)}| \cdot u\Big] = 0. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Für jeden Punkt $x^{(i_1)} \in m^{(i_1)}$ ist [11])

$$\begin{aligned} &\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \overline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \overline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u \leqq \\ &\quad \leqq \overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \overline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \overline{\int}_{m^{(i_n)}} dG^{(i_n)} \cdot u - \\ &\qquad - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \underline{\int}_{m^{(i_n)}} d|g^{(i_n)}| \cdot u \end{aligned}$$

---

[11]) Siehe dabei loc. cit. 2), § 6 u. § 7^{bis} (letzter Satz).

und

$$\underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \underline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u \geqq$$
$$\geqq \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \underline{\int}_{m^{(i_n)}} dG^{(i_n)} \cdot u -$$
$$- \overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \overline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \overline{\int}_{m^{(i_n)}} d\left|g^{(i_n)}\right| \cdot u.$$

Damit folgt aus (21) und (22)

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \Big[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \overline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \overline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u - \\ &\qquad - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \underline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u\Big] = 0. \end{aligned} \right.$$

Denn es läßt sich zeigen, daß Ober- und Unterintegral in bezug auf $T^{(i_1)}$ des in (23) vorkommenden Integranden beide zwischen Null und dem Integral, welche Summe der Integrale (21) und (22) ist, liegen.

Wegen

$$\underline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \leqq \overline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$$

folgt aus (23):

$$\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \Big[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \overline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \overline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) -$$
$$- \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \overline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})\Big] = 0$$

und

$$\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \Big[\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \overline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \underline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u -$$
$$- \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_{n-1})}} dT^{(i_{n-1})} \underline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u\Big] = 0.$$

Da under Annahme der Bedingung ω schon loc. cit. 2), § 11 bewiesen wurde, daß die Bedingungen des Hauptsatzes für den Fall $n=2$ hinreichend sind, liefert (wie sich zeigen wird) vollständige Induktion unter Annahme der Bedingungen ω und ω^*:

1° die Existenz von

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{m^{(i_1)}} d\Phi^{(i_1)} \overline{\underline{\int}}_{m^{(i_2)}} d\Phi^{(i_2)} \dots \overline{\underline{\int}}_{m^{(i_{n-1})}} d\Phi^{(i_{n-1})} \overline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u \text{ und} \\ &\qquad\qquad \int_{m^{(i_1)}} d\Phi^{(i_1)} \overline{\underline{\int}}_{m^{(i_2)}} d\Phi^{(i_2)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u; \end{aligned} \right.$$

2° die Existenz eines gemeinsamen Wertes für die Integrale (24) bei der gewählten Permutation $\{i_1, \dots, i_n\}$ und für die Integrale, welche aus (24) bei allen möglichen weiteren Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots, n$ hervorgehen.

Nur 2° fordert nähere Betrachtung.

Dabei benötigen wir zwei Hilfssätze.

§ 4. **Hilfssatz a.** $T^{(j)}, K^{(j)}, K_2{}^{(j)}$ seien wie loc. cit. 2), § 1.

Zu Mengen $A \in K_2{}^{(j)}$, $E^{(l)} \in K_2{}^{(j)}$ $(l=1, 2, \dots)$ und einer Zahl δ, mit

$$m_{T^{(j)}}(A) \geqq \delta > 0 \text{ und } \sum_{l=1}^{\infty} m_{T^{(j)}}(E^{(l)}) < \delta,$$

gibt es immer einen Punkt $P \in A, \notin \sum_{(l)} E^{(l)}$.

Beweis. Im entgegengesetzten Fall ist $A \subseteqq \sum\limits_{(l)} E^{(l)}$, somit $\lim\limits_{l\to\infty} \{A - -A\cdot(E^{(1)}+\ldots+E^{(l)})\}=0$; die σ-Additivität von $T^{(j)}$ liefert dann

$$m_{T^{(j)}}(A) = \lim_{l\to\infty} m_{T^{(j)}}[A \cdot (E^{(1)} + \ldots + E^{(l)})],$$

wodurch

$$m_{T^{(j)}}(A) \leqq \lim_{l\to\infty} m_{T^{(j)}}(E^{(1)} + \ldots + E^{(l)}) \leqq \sum_{l=1}^{\infty} m_{T^{(j)}}(E^{(l)}) < \delta,$$

im Widerspruch zu $m_{T^{(j)}}(A) \geqq \delta$.

Als Spezialfall folgt der

Hilfssatz b. $T^{(j)}$, $K^{(j)}$, $K_2{}^{(j)}$ seien wie loc. cit. 2), § 1.

Aus $A \in K_2{}^{(j)}$, $E^{(l)} \in K_2{}^{(j)}$ $(l=1, 2, \ldots)$, mit $m_{T^{(j)}}(A) > 0$, $m_{T^{(j)}}(E^{(l)}) = 0$ $(l=1, 2, \ldots)$, folgt die Existenz eines Punktes $P \in A, \notin \sum\limits_{l=1}^{\infty} E^{(l)}$.

§ 5. Die Fortsetzung des Beweises von § 3 verläuft in zwei Etappen.

α. Bei der willkürlichen Permutation $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ seien hier die nach Bedingung ω^* abzählbar vielen Teilmengen von $M^{(i_\nu)} (\nu=1, 2, \ldots, n)$, welche zu $K_0{}^{(i_\nu)}$ gehören, angedeutet durch $(r^{(i_\nu, p)})$ $(p=1, 2, \ldots)$ 5bis). Ist $\{\eta_k\}$ eine abnehmende und gegen Null konvergierende Folge, so soll für jedes k $E^{(i_1,k)}_{(r^{(i_2,p_{i_2}')}, r^{(i_3,p_{i_3}')}, \ldots, r^{(i_n,p_{i_n}')})}$ die Teilmenge von $M^{(i_1)}$ sein, in deren Punkten $(x^{(i_1)})$ gilt:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} &\overline{\int}_{r^{(i_2,p_{i_2}')}} dT^{(i_2)} \overline{\int}_{r^{(i_3,p_{i_3}')}} dT^{(i_3)} \ldots \overline{\int}_{r^{(i_n,p_{i_n}')}} dT^{(i_n)} \cdot u(x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, \ldots, x^{(i_n)}) - \\ &- \underline{\int}_{r^{(i_2,p_{i_2}')}} dT^{(i_2)} \underline{\int}_{r^{(i_3,p_{i_3}')}} dT^{(i_3)} \ldots \underline{\int}_{r^{(i_n,p_{i_n}')}} dT^{(i_n)} \cdot u(x^{(i_1)}, \ldots, x^{(i_n)}) \geqq \eta_k; \end{aligned} \right.$$

die p_{i_ν}' sind dabei willkürlich gewählte natürliche Zahlen $(\nu=2, \ldots, n)$. Da alle Integrale (4) nach Voraussetzung den Wert Null haben, hat die Menge $E^{(i_1,k)}_{(r^{(i_2,p_{i_2}')}, r^{(i_3,p_{i_3}')}, \ldots, r^{(i_n,p_{i_n}')})}$ ein $T^{(i_1)}$-Maß gleich Null. Dies gilt auch für die $(n-1)!-1$ weiteren Mengen, welche durch Permutation von $(i_2, i_3, \ldots, i_n)$ erhalten werden. Da außerdem die p_{i_ν}' und k willkürliche natürliche Zahlen sein dürfen, werden in dieser Weise abzählbar unendlich viele Teilmengen von $M^{(i_1)}$ von $T^{(i_1)}$-Maß Null erhalten, welche wir schreiben: $H_1{}^{(i_1)}, H_2{}^{(i_1)}, \ldots, H_n{}^{(i_1)}, \ldots$.

Anwendung von Hilfssatz b (§ 4) zeigt, daß bei $m^{(i_1)} \subseteqq M^{(i_1)}$ und $\in K^{(i_1)}$ aus $m_{T^{(i_1)}}(m^{(i_1)}) > 0$ die Existenz eines Punktes $\bar{x}^{(i_1)} \in m^{(i_1)}$ folgt, der zu keiner der Mengen $H_j{}^{(i_1)}$ $(j=1, 2, \ldots)$ gehört; für $x^{(i_1)}=\bar{x}^{(i_1)}$ haben somit alle Differenzen (25) den Wert Null, bei allen möglichen Permutationen der Zahlen $i_2, i_3, \ldots, i_n$ und allen möglichen Werten der natürlichen Zahlen p_{i_ν}' $(\nu=2, \ldots, n)$.

Wegen der Beschränktheit von u auf $M^{(1)} \times M^{(2)} \times \ldots \times M^{(n)}$ folgt mit Bedingung ω^* aus dem Nullsein der Differenzen (25) im betrachteten Punkt $\bar{x}^{(i_1)} \in m^{(i_1)}$, daß auch für alle $m^{(i_\nu)} \subseteqq M^{(i_\nu)}$ und $\in K^{(i_\nu)}$ $(\nu=2, \ldots, n)$ in dem Punkt $\bar{x}^{(i_1)}$

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} &\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \overline{\int}_{m^{(i_3)}} dT^{(i_3)} \dots \overline{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(i_1)}, \dots, x^{(n)}) - \\ &\qquad - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \underline{\int}_{m^{(i_3)}} dT^{(i_3)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u(\dots, \bar{x}^{(i_1)}, \dots) = 0 \end{aligned} \right.$$

ist; bei jeder Permutation der Zahlen $i_2, i_3, \dots, i_n$ bleibt dies der Fall.

Mit loc. cit. 2), § 7bis (letzter Satz) folgt in $\bar{x}^{(i_1)}$:

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} &\overline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \{\overline{\int}_{m^{(i_3)}} dT^{(i_3)} \dots \overline{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u(\dots, \bar{x}^{(i_1)}, \dots) - \\ &\qquad - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \underline{\int}_{m^{(i_3)}} dT^{(i_3)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u(\dots, \bar{x}^{(i_1)}, \dots)\} \leqq \\ &\qquad\qquad \leqq \text{die Differenz (26).} \end{aligned} \right.$$

Ersetzt man im Vorderglied von (27) $\overline{\int}_{m^{(i_2)}}$ durch $\underline{\int}_{m^{(i_2)}}$, so ist das so erhaltene Unterintegral immer $\geqq 0$. Somit existieren in $\bar{x}^{(i_1)}$ die Integrale

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \{\overline{\int}_{m^{(i_3)}} dT^{(i_3)} \dots \overline{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u(\dots, \bar{x}^{(i_1)}, \dots) - \\ &\qquad - \underline{\int}_{m^{(i_3)}} dT^{(i_3)} \dots \underline{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u(\dots, \bar{x}^{(i_1)}, \dots)\}, \end{aligned} \right.$$

und haben den Wert Null, bei willkürlicher Wahl der Teilmengen $m^{(i_\nu)} \subseteqq M^{(i_\nu)}$ und $\in K^{(i_\nu)}$ $(\nu = 2, \dots, n)$; das gleiche gilt bei allen möglichen Permutationen der in (28) vorkommenden $i_2, i_3, \dots, i_n$.

Setzen wir die Hinlänglichkeit der Bedingungen für den Fall $n-1$ als bekannt voraus. Dann folgt aus dem vorigen Absatz, daß im betrachteten Punkt $\bar{x}^{(i_1)}$ bei allen möglichen Permutationen der Zahlen $i_2, i_3, \dots, i_n$ die Integrale

$$\int_{m^{(i_2)}} d\Phi^{(i_2)} \overline{\underline{\int}}_{m^{(i_3)}} d\Phi^{(i_3)} \dots \overline{\underline{\int}}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u(\dots, \bar{x}^{(i_1)}, \dots)$$

existieren, und außerdem einander gleich sind; jedes $m^{(i_1)} \subseteqq M^{(i_1)}$ mit $m_{T^{(i_1)}}(m^{(i_1)}) > 0$ enthält somit einen Punkt $\bar{x}^{(i_1)}$ mit dieser Eigenschaft.

Daraus und aus der Existenz der Integrale (24) folgt nun, daß alle diejenigen n-fach iterierten Integrale, bei denen am letzten nach $\Phi^{(i_1)}$ integriert wird, im Sinne der Bemerkung in § 2 existieren, und außerdem einander gleich sind [12]).

β. Aus der Existenz von

$$\int_{m^{(i_1)}} d\Phi^{(i_1)} \overline{\underline{\int}}_{m^{(i_2)}} d\Phi^{(i_2)} \overline{\underline{\int}}_{m^{(i_3)}} d\Phi^{(i_3)} \dots \overline{\underline{\int}}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$$

und

$$\int_{m^{(i_2)}} d\Phi^{(i_2)} \overline{\underline{\int}}_{m^{(i_1)}} d\Phi^{(i_1)} \overline{\underline{\int}}_{m^{(i_3)}} d\Phi^{(i_3)} \dots \overline{\underline{\int}}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$$

folgt, daß sie einander gleich sind. Denn sie können als zweifach iterierte Integrale derselben Funktion von $x^{(i_1)}$ und $x^{(i_2)}$ betrachtet werden.

Mit α und β folgt Existenz und Gleichheit aller n-fach iterierten Integrale, welche zu derselben Gruppe $\{m^{(j)}\}$ von Mengen gehören, mit $m^{(j)} \in K^{(j)}, \subseteqq M^{(j)}$ $(j = 1, \dots, n)$ [13]).

---

[12]) Man benutze dabei etwa loc. cit. 2), § 8 (Satz).

[13]) Ausgehend von loc. cit. 2), § 10 (Hilfssatz), und unter Anwendung von Hilfssatz *b*, folgt in weit einfacherer Weise der Satz: Für $j = 1, 2, \dots, n$ seien

Korollar. Für $j=1, 2, \ldots, n$ seien $R^{(j)}$, $K^{(j)}$, $\Phi^{(j)}$ und $T^{(j)}$ definiert wie loc. cit. 2), § 7; außerdem sei $M^{(j)} \in K^{(j)}$, und die Funktion $u(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ beschränkt auf der Produktmenge $M^{(1)} \times M^{(2)} \times \ldots \times M^{(n)}$.

Existieren nun für alle Punkte $(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(j-1)}, \bar{x}^{(j+1)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}) \in M^{(1)} \times \ldots \times M^{(j-1)} \times M^{(j+1)} \times \ldots \times M^{(n)}$ die Integrale

$$\int_{M^{(j)}} d\Phi^{(j)} \cdot u(\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(j-1)}, x^{(j)}, \bar{x}^{(j+1)}, \ldots, \bar{x}^{(n)} \quad (j=1, \ldots, n),$$

so existieren bei allen Permutationen $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ die iterierten Integrale

$$\int_{M^{(i_1)}} d\Phi^{(i_1)} \int_{M^{(i_2)}} d\Phi^{(i_2)} \ldots \int_{M^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}),$$

und haben dabei den gleichen Wert [14]).

Anwendung der abstrakten Theorie

§ 6. In loc. cit. 2), §§ 13–16 wurde die abstrakte Integrationstheorie der dort vorangehenden Paragraphen auf den Fall der beschränkt- und σ-additiven Maße $\Phi^{(j)}$ in n_j-dimensionalen euklidischen Räumen $R^{(j)}$ angewandt; dabei erfüllten $R^{(j)}, K^{(j)}, \Phi^{(j)}$ und $T^{(j)}$ die Bedingung ω.

Daneben ist auch die hier in § 3 eingeführte Bedingung ω^* erfüllt. Dazu ist das zugehörige Teilsystem $K_0{}^{(j)}$ von $K^{(j)}$ wie folgt zu wählen, wobei wir uns auf den Fall $n_j=2$ beschränken; es enthalte alle und nur alle Mengen, welche aus endlich vielen disjunkten Teilmengen der vier folgenden Gruppen aufgebaut sind: 1° die Gruppe der nur einen einzelnen Punkt (ξ, η) enthaltenden Mengen, mit $T^{(j)}[\{(\xi, \eta)\}]>0$; 2° die offenen linearen Intervalle $l(x=x_0; y_1<y<y_2)$ oder $l_{x_0}(y_1, y_2)$, mit y_1, y_2 rational, welche auf einer singulären Linie in bezug auf $T^{(j)}$ (und $\Phi^{(j)}$), d.h. auf einer Geraden $x=x_0$ liegen, die mindestens ein lineares Intervall mit $T^{(j)}$-Maß >0 enthält; 3° die offenen linearen Intervalle $l_{y_0}(x_1, x_2)$, mit

---

$R^{(j)}, K^{(j)}, \Phi^{(j)}$ definiert wie loc. cit. 2), § 7 mit $\Phi^{(j)}$ immer nicht-negativ, und mit nur der Eigenschaft ω in $R^{(j)}$; außerdem sei jede Menge $M^{(j)} \in K^{(j)}$, und die Funktion $u(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$ beschränkt auf der Produktmenge $M^{(1)} \times M^{(2)} \times \ldots \times M^{(n)}$.

Damit die n-fach iterierten *R.–S.* Integrale

$$\int_{M^{(i_1)}} d\Phi^{(i_1)} \overline{\int}_{M^{(i_2)}} d\Phi^{(i_2)} \ldots \underline{\int}_{M^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) \tag{29}$$

für alle Permutationen $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ existieren, ist notwendig und hinreichend, daß bei jeder solchen Permutation

$$\int_{M^{(i_1)}} d\Phi^{(i_1)} \left[\overline{\int}_{M^{(i_2)}} d\Phi^{(i_2)} \ldots \overline{\int}_{M^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u - \underline{\int}_{M^{(i_2)}} d\Phi^{(i_2)} \ldots \underline{\int}_{M^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u\right]$$

existiert, und den Wert Null hat.

Die Integrale (29) haben dann auch immer den gleichen Wert.

Der Beweis verläuft wie der eines korrespondierenden Satzes über n-fach irerierte Riemann–Integrale (in euklidischen Räumen) in [3], S. 139–142.

[14]) Dieses Korollar ist auch eine unmittelbare Folge des Korollars loc. cit. 2), § 11, bei dessen Beweis nur Bedingung ω benutzt wird; Bedingung ω^* zeigt sich dann als überflüssig.

x_1, x_2 rational, welche auf einer singulären Linie $y = y_0$ in bezug auf $T^{(j)}$ parallel zur x-Achse liegen; 4° die offenen zweidim. Intervalle $i(x_1, x_2; y_1, y_2)$ mit x_1, x_2, y_1, y_2 rational.

Das Haupttheorem (§§ 2, 3) ist somit anwendbar, und liefert:

Sind für $j = 1, \ldots, n$ $R^{(j)}$ *euklidische Räume der Dimension* n_j *(die* n_j *natürliche Zahlen),* $\psi^{(j)}$ *Segmentfunktionen wie loc. cit.* 2), § 13, $\Phi^{(j)}$ *aus den* $\psi^{(j)}$ *für die Mengen des* (in analoger Weise wie l.c. definierten) *Körpers* $K^{(j)}$ *abgeleitete beschränkt- und* σ*-additive Mengenfunktionen, mit zugehörigen Totalvariationen* $T^{(j)}$, *so gilt folgendes.*

Ist $M^{(j)} \in K^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, n)$, *und ist die Funktion* $u(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ $(x^{(j)} \in R^{(j)})$ *beschränkt auf der Produktmenge* $M^{(1)} \times \ldots \times M^{(n)}$ (in $R^{(1)} \times \ldots \ldots \times R^{(n)}$), *so ist zur Existenz der n-fach iterierten Riemann–Stieltjesschen Integrale* (im Sinne von § 2, Bemerkung)

$$(30) \qquad \int_{m^{(i_1)}} d\Phi^{(i_1)} \bar{\int}_{m^{(i_2)}} d\Phi^{(i_2)} \ldots \bar{\underline{\int}}_{m^{(i_n)}} d\Phi^{(i_n)} \cdot u(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$$

bei jeder Menge $m^{(i_1)} \subseteqq M^{(i_1)}, \in K^{(i_1)}$, *jeder Menge* $m^{(i_2)} \subseteqq M^{(i_2)}, \in K^{(i_2)}, \ldots,$ *und jeder Menge* $m^{(i_n)} \subseteqq M^{(i_n)}, \in K^{(i_n)}$, *und wie auch die Permutation* $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ *der Zahlen* 1, 2, ..., *n gewählt wird, notwendig und hinreichend daß bei jeder Permutation* $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ *die R.–S. Integrale*

$$\int_{m^{(i_1)}} dT^{(i_1)} \left[\bar{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \ldots \bar{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u - \underline{\int}_{m^{(i_2)}} dT^{(i_2)} \ldots \underline{\int}_{m^{(i_n)}} dT^{(i_n)} \cdot u \right]$$

für alle wie oben definierten $m^{(i_1)}, \ldots, m^{(i_n)}$ *existieren, und den Wert Null haben.*

Dabei ist dann der Wert der Integrale (30) *unabhängig von der Wahl der Permutation* $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.

BIBLIOGRAPHIE

(über n-fach iterierte Riemann- und Riemann–Stieltjessche Integrale)

1. RIDDER, J., Over bovenste en onderste limieten, Nieuw Archief (Amsterdam) (2) **15** (erstes Stück), 34–48 (1925).
2. ETTLINGER, H. J., On multiple iterated integrals, Am. Journal of Math. **48**, 215–222 (1926).
3. RIDDER, J., Das Riemannsche Integral und das Maß (J), C.R. Soc. Sci et L. de Varsovie, classe III, 22, 118–142 (1929).
4. LUIKENS, H., Riemann–Stieltjes integratie bij functies van twee of meer veranderlijken, Diss. Groningen 1937, 163 Seiten, N.V. Wolters, Groningen–Batavia.